Ergänzende Übungsaufgaben zur Statistik

Prof. Dr. Stefan Georg

Inhalt

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten 1
Eindimensionale diskrete Zufallsvariablen 3
Eindimensionale stetige Zufallsvariablen 6
Verteilungsparameter 7
Aufgaben zur Normalverteilung 8
Der zentrale Grenzwertsatz und die Ungleichung von Tschebyscheff 9

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

1. Aufgabe:

A, B und C seien die drei Ereignisse:

A = {Es regnet.}
B = {Ich habe Hunger.}
C = {Es ist Stadtfest.}

Beschreiben Sie mit Hilfe der Mengenoperationen folgende Ereignisse:

a) Es regnet, und ich habe Hunger, aber es ist kein Stadtfest.
b) Genau Ereignis A tritt ein.
c) Es regnet nicht, ich habe kein Hunger, und es ist auch kein Stadtfest.
d) Wenigstens eines der drei Ereignisse tritt ein.
e) Genau eines der drei Ereignisse tritt ein.
f) Höchstens zwei der drei Ereignisse treten ein.

2. Aufgabe:

Ein Professor weiß, dass Thesis Arbeiten in 70% aller Fälle sprachliche Mängel und sogar in 80% aller Fälle inhaltliche Mängel aufweisen. Nur 5% aller Arbeiten weisen dagegen überhaupt keine Mängel auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Thesis

a) sprachliche oder inhaltliche Mängel aufweist,
b) sprachliche und inhaltliche Mängel aufweist,
c) sprachliche, aber keine inhaltliche Mängel aufweist?

3. Aufgabe:

Nikolaus hat in seinem Rucksack ein gelbes, ein rotes und ein blaues Päckchen. Die drei Päckchen haben jeweils die gleiche Größe. Aus der Schachtel werden ohne Zurücklegen nacheinander zwei Päckchen entnommen. A beschreibt das Ereignis, dass das erste entnommene Päckchen gelb ist, B sei das Ereignis, dass das zweite entnommene Päckchen rot ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) das erste entnommene Päckchen gelb ist,
b) das erste entnommene Päckchen gelb und das zweite rot ist,
c) das erste entnommene Päckchen gelb oder das zweite rot ist,
d) das zweite Päckchen rot ist, wenn das erste entnommene gelb ist,
e) das zweite Päckchen rot ist, wenn das erste nicht gelb ist.

4. Aufgabe:

Ein Unternehmen produziert DVD-Laufwerke für Computer. Dabei werden an jedem der 6 Arbeitstage gleich viele DVD-Laufwerke hergestellt. Es hat sich herausgestellt, dass 20% der samstags hergestellten DVD-Laufwerke Mängel aufweisen, während 90% der DVD-Laufwerke, die an einem anderen der übrigen fünf Tage fabriziert werden, fehlerfrei sind.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein DVD-Laufwerk fehlerhaft ist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes DVD-Laufwerk mittwochs hergestellt wurde?
c) Sind die Ereignisse "Das DVD-Laufwerk ist samstags hergestellt." und "Das DVD-Laufwerk ist fehlerhaft." stochastisch unabhängig?

5. Aufgabe:

Familie Gerd Becker besteht aus drei Personen: Vater, Mutter und Sohn. Sie benutzen alle dasselbe Auto, eine alte, klapprige Ente. Die Beckers haben sich dazu entschieden, dass Vater Gerd den Wagen von montags bis donnerstags, Mutter Alice das Auto am Freitag und Sohn Gregor die Ente am Wochenende fahren darf. Die rasenden Beckers wissen, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Knöllchen wegen überhöhter Geschwindigkeit zu erhalten, bei Gerd 18%, bei Alice 8% und bei Gregor 25% beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Beckers an einem beliebigen Tag ein Knöllchen erhalten und
b) die Ente an diesem Tag weder von Gerd noch von Alice benutzt wird?

6. Aufgabe:

Dr. Siggi Freude untersucht seine Patienten hinsichtlich einer Geisteskrankheit. Exakt 10% seiner Patienten leiden an der unangenehmen Krankheit, die mit penetranten Wahnvorstellungen verbunden ist. Dummerweise werden von ihm gesunde Patienten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 als krank eingestuft; dagegen diagnostiziert er Kranke nur mit Wahrscheinlichkeit 0,9 zutreffend als krank.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein von ihm untersuchter Patient als geisteskrank eingestuft?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird einer seiner Patienten als krank eingestuft, obwohl er gesund ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Diagnose?

7. Aufgabe:

Die drei Nachwuchswissenschaftlerinnen Tina, Klaudija und Aleksandra arbeiten in einem Forschungsinstitut. Da alle drei gewissenhafte Arbeiterinnen sind, unterlaufen ihnen nur wenige Fehler. Tina arbeitet wöchentlich 12 Stunden, Klaudija und Aleksandra jeweils 9 Stunden. Die Wahrscheinlichkeit, bei der Arbeit einen Fehler zu machen, beträgt bei Tina 2%, bei Klaudija 4% und bei Aleksandra 3%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass einer Nachwuchswissenschaftlerin ein Fehler unterläuft?
b) dass ein aufgedeckter Fehler von Aleksandra verursacht wurde?
c) dass eine tadellose Arbeit auf Tina zurückgeht?

8. Aufgabe:

In einem Pharmaunternehmen werden drei Produktionsanlagen A, B und C eingesetzt. Aus Erfahrung weiß man, dass dabei von den folgenden Ausfallwahrscheinlichkeiten der Anlagen aufgrund von Wartung oder Reparatur auszugehen ist:

Anlage A: $p_1 = 0{,}05$ Anlage B: $p_2 = 0{,}08$ Anlage C: $p_3 = 0{,}10$

Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Ausfälle der Produktionsanlagen stochastisch unabhängig sind, die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) Keine der drei Anlagen fällt aus.
b) Wenigstens eine der drei Produktionsanlagen arbeitet ohne Störung.
c) Höchstens eine Anlage fällt aus.
d) Genau zwei Anlagen, dazu zählt Anlage B, fallen aus.

Eindimensionale diskrete Zufallsvariablen

9. Aufgabe:

In einem Topf befinden sich vier Lose, die von 1 bis 4 nummeriert sind. Es werden zufällig zwei Lose gleichzeitig entnommen.

a) Schreiben Sie die möglichen Ausgänge dieses Zufallsexperimentes auf.
b) Ordnen Sie jedem Ausgang die Summe der Zahlen (X) auf den gezogenen Losen zu.
c) Geben Sie die Punktwahrscheinlichkeiten der Zufallsvariablen X an.
d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.
e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass
    - e1) X mindestens 4, höchstens aber 6 ist,
    - e2) X genau 4 ist,
    - e3) X höchstens 5 ist,
    - e4) X kleiner als 5 ist,
    - e5) X mindestens 6 ist,
    - e6) X größer als 6 ist,
    - e7) X mindestens 3, höchstens aber 7 ist.

10. Aufgabe:

Die diskrete Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Kreditkarten eines durchschnittlichen BWL-Studenten und besitzt folgende Verteilungsfunktion:

$F_X(x) = 0$ für $x<1$
$F_X(x) = 0{,}125$ für $1 \leq x<2$
$F_X(x) = 0{,}375$ für $2 \leq x<3$
$F_X(x) = 0{,}5$ für $3 \leq x<4$
$F_X(x) = 1$ für $x \geq 4$

a) Geben Sie die Sprungstellen mit den dazugehörigen Punktwahrscheinlichkeiten an.
b) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
(1) $P\{1 < X \leq 3\}$ (2) $P\{1 \leq X < 3\}$ (3) $P\{X \geq 2\}$
c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = -2X + 4$.

11. Aufgabe:

Die Zufallsvariable X besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	0	2	4	6
$P\{X=x_i\}$	p_1	p_2	p_3	p_4

Für die Verteilungsfunktion gelte: $F_X(0) = 0{,}125$
$F_X(4) = 0{,}5$.
Außerdem gilt: $2p_2 + 4p_3 + 6p_4 = 4$

a) Bestimmen Sie die vier Wahrscheinlichkeiten.
b) Geben Sie die Verteilungsfunktion der Variablen X vollständig an.
c) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
(1) $P\{1 < X \leq 4\}$ (2) $P\{0 \leq X < 3\}$ (3) $P\{X < 4\}$
d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = -3X + 1$.

12. Aufgabe:

Die Kaiser-Versicherung schließt mit vier 30-jährigen Männern private Rentenversicherungen ab, die in genau 35 Jahren zu einer ersten Rentenzahlung führen werden. Nach der aktuell gültigen Sterbetafel beträgt für einen 30-jährigen Mann die Wahrscheinlichkeit, in 35 Jahren noch zu leben, genau 0,6. Berechnen Sie unter der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der vier Männer die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 35 Jahren

a) alle vier Männer noch leben,
b) wenigstens drei Männer noch leben,
c) genau drei der vier Männer verstorben sind,
d) höchstens einer der vier Männer noch lebt.

Hinweis: Formulieren Sie zunächst eine geeignete Zufallsvariable.

13. Aufgabe:

In der Universitätsdruckerei liegen die Klausuren in Tresoren, die vierfach durch baugleiche Systeme gesichert sind. Die Ausfallwahrscheinlichkeit für ein Sicherungssystem sei mit 0,01angenommen. Berechnen Sie unter der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der verwendeten Sicherungssysteme die Wahrscheinlichkeiten für:

a) Keines der Sicherungssysteme fällt aus.
b) Mindestens eines der Systeme arbeitet störungsfrei.
c) Höchstens eines der Systeme fällt aus.
d) Genau zwei Systeme sind gestört.

14. Aufgabe:

In einer Hochschulverwaltung arbeiten 80 Angestellte, wobei jeder einzelne jeweils eine Krankheitswahrscheinlichkeit von 0,05 besitzt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten zu folgenden Ereignissen an, und denken Sie dabei daran, zunächst ein oder zwei geeignete Zufallsvariablen zu definieren:

a) Keiner der Angestellten ist krank.
b) Genau 20 der 80 Angestellten sind an einem bestimmten Tag krank.
c) Mindestens 30 der 80 Angestellten sind gesund.
d) Höchstens 15 Angestellte fehlen wegen Krankheit.
e) Mindestens 20 und höchstens 25 der 80 Angestellten sind krank.
f) Es sind mehr Angestellte gesund als krank.

15. Aufgabe:

Graf Dracula betreibt ein Unternehmen, welches täglich 10.000 Blutkonserven auf den Sauerstoffgehalt des Blutes hin untersucht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Konserve mit zu geringem Sauerstoffanteil gefunden wird, beträgt 0,1. Am Freitag, den 13. analysiert Graf Dracula höchst persönlich 100 Blutkonserven. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) genau 5 der 100 Konserven zu wenig Sauerstoff enthalten,
b) höchstens 5 Blutkonserven unbrauchbar sind,
c) mindestens 90 Blutkonserven sich als einwandfrei herausstellen,
d) mindestens 3 und höchstens 7 Blutkonserven zu sauerstoffarm sind,
e) höchstens 85 Konserven als einwandfrei gelten können?

Eindimensionale stetige Zufallsvariablen

16. Aufgabe:

Ein saarländischer Fabrikant für Schreibwaren stellt u.a. Buntstifte her. Die Länge X der Buntstifte ist leider nicht konstant und muss von daher als eine Zufallsvariable angesehen werden. Der Fabrikant geht dabei von folgender Dichte(funktion) aus:

$f_X(x) = c(16x-x^2-60)$ für $6 < x < 10$
und
$f_X(x) = 0$ sonst.

a) Welchen Wert muss c annehmen, damit $f_X(x)$ überhaupt eine Dichte(funktion) ist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X größer als 9 ist?
c) Wie groß muss d sein, damit $P\{X \leq d\} = 0{,}5$ gilt?

17. Aufgabe:

Die Haltbarkeitsdauer X von Fruchtsirup (gemessen in Monaten) sei eine Zufallsvariable mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichte:

$f_X(x) = cx(5-x)$ für $0 < x < 5$
und
$f_X(x) = 0$ für alle anderen Werte von x.

a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f_X(x)$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.
b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X größer als 3 ist?

18. Aufgabe:

X sei eine Zufallsvariable, die Peters Ausdauer (in Minuten) beim Joggen beschreibt. Da er ein wenig aus der Übung ist, kann von folgender Dichtefunktion ausgegangen werden:

$f_X(x) = cx(20-x)$ für $0 < x < 20$
und
$f_x(x) = 0$ sonst.

a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peters Ausdauer für mehr als 10 Minuten reicht?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peters Ausdauer genau für 12 Minuten reicht?

Verteilungsparameter

19. Aufgabe:

Christophs Erfolg bei Frauen kann als nicht-sehr-häufiges Ereignis angesehen werden. Von daher erscheint die Beschreibung der Anzahl der Frauen, die Christoph an einem Abend kennenlernt, als poissonverteilte Zufallsvariable X mit dem Parameter 3 als angemessen. Die Zufallsvariable Y beschreibt gleichzeitig die monetären Ausgaben, die mit den Kennenlernversuchen verbunden sind. Christoph unterstellt, dass Y exponentialverteilt mit Parameter 5 ist. Ferner geht er von einer positiven Korrelation der beiden Variablen mit korr(X,Y) = 0,5 aus.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y an.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von 4X + 2Y + 5.
c) Bestimmen Sie die Covarianz Cov(3X, 2Y).
d) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $3X^2 - 3Y^2$.
e) Bestimmen Sie die Varianz von 3X - 4Y + 2.

20. Aufgabe:

Die Zufallsvariable X beschreibt Simones Drang, in Kaufhäusern auf Schnäppchenjagd zu gehen. Dabei besitzt X folgende Verteilungsfunktion:

$F_X(x) = 0$ für $x < 0$
$F_X(x) = 0{,}25(3x^2-x^3)$ für $0 \leq x < 2$
$F_X(x) = 1$ für $x \geq 2$.

a) Zeigen Sie, dass X den Erwartungswert 1 und die Varianz 0,2 besitzt.
b) Y sei identisch verteilt wie X. Ferner sei korr(X,Y) = 0,4. Berechnen Sie Cov(3X, 4Y).
c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Z = 3X - 2Y + 1.

21. Aufgabe:

X sei eine normalverteilte Zufallsvariable, die den Inhalt einer Flasche Ron Miel Canario (kanarische Spezialität aus Rum und Honig) beschreibt. X habe einen Erwartungswert von 10 und eine Varianz 4. Y sei eine Variable, mit der dargestellt werden soll, wie groß die Gefahr ist, beim Schmuggeln von Ron Miel Canario am Flughafen ertappt zu werden. Für dieses Ereignis erscheint die Annahme einer Poissonverteilung mit dem Parameter 2 als angemessen. Weiterhin gelte: korr(X,Y) = 0,2.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und von Y an.
b) Berechnen Sie Cov(X, Y), E(2X - 3Y + 1) und Var(4X - 2Y - 3).
c) Kennzeichnen Sie die folgenden Aussagen mit wahr oder falsch:
    1. Die Covarianz von X und Y liegt zwischen plus und minus unendlich.
    2. Der Korrelationskoeffizient von X und Y liegt im Intervall [0; 1].
    3. "X und Y sind stochastisch unabhängig" ist äquivalent zu "korr(X, Y) = 0".
    4. Wenn Cov(X, Y) = 0 gilt, dann sind X und Y stochastisch unabhängig.
    5. $E(X^2) \geq [E(X)]^2$
    6. Cov(X, Y) = 0 ist äquivalent zu E(XY) = E(X)E(Y)

22. Aufgabe:

Die Zufallsvariable X sei ein Maß für die Energie, mit der Thorsten ein bekanntes coffeeinhaltiges Brausegetränk vertreibt. X habe folgende Wahrscheinlichkeitsdichte:

$f_X(x) = 3x^2/125$ für $0 < x < 5$
und
$f_X(x) = 0$ sonst.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y mit $Y = 1/X$.
b) Es sei Z = Y und korr(Y, Z) = 0,5.
   b1) Berechnen Sie Cov(3Y, 4Z).
   b2) Berechnen Sie $E(2Y^2 - 3Z^2)$.
   b3) Berechnen Sie Var(2Y – Z + 3).

Aufgaben zur Normalverteilung

23. Aufgabe:

Martina ist stolze Miteigentümerin einer Brauerei. Die Abfüllmenge X [in ml] des dunklen Hefeweizens in braune Designerflaschen auf einer etwas älteren Abfüllanlage wird als eine normalverteilte Zufallsvariable mit E(X) = 500 und Var(X) = 2500 angesehen.

a) Berechnen Sie P{X < 550}.
b) Berechnen Sie P{400 < X < 600}.

24. Aufgabe:

Eine Maschine verpackt jeweils 16 Haselnussschnitten in einen Karton. Das Gewicht X einer Haselnussschnitte sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 40 und der Varianz 4. Das Gewicht Y des Kartons sei ebenfalls normalverteilt mit dem Erwartungswert 160 und der Varianz 36.

a) Wie groß sind Erwartungswert und Varianz eines gefüllten Kartons Z?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Inhalt des Kartons weniger als 648 beträgt?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 780 < Z < 820 gilt?
d) Geben Sie den zum Erwartungswert von Z symmetrischen Bereich an, in dem Z mit 95% Wahrscheinlichkeit liegt.

25. Aufgabe:

Es seien $X_1 = X_2 = ... = X_{16}$ jeweils $N(5; 1^2)$-verteilte, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils das Gewicht eines Schokobonbons für Erwachsene beschreiben. Z sei die Summe der genannten 16 Zufallsvariablen.

a) Berechnen Sie E(Z) und Var(Z).
b) Berechnen Sie P{Z > 44}.
c) Berechnen Sie P{44 < Z < 52}.
d) Bestimmen Sie a so, dass gilt: $P\{|Z - E(Z)| < a\} = 0{,}95$.

26. Aufgabe:

Heike arbeitet in einer Kurklinik und begleitet dort immer 9 Kurgäste durch ihre Erholungskur. Am Ende des Aufenthalts hat jeder Kurgast seine Zufriedenheit X_i mit der Betreuung durch Heike zu bewerten. Die Zufriedenheitswerte werden als die Realisationen von $N(5; 3^2)$-verteilten Zufallsvariablen angesehen. Z sei die Gesamtsumme der 9 Zufallsvariablen.

a) Berechnen Sie E(Z) und Var(Z).
b) Berechnen Sie $P\{Z > 54\}$.
c) Berechnen Sie $P\{36 < Z < 63\}$.

Der zentrale Grenzwertsatz und die Ungleichung von Tschebyscheff

27. Aufgabe:

Zur Beschreibung des Betriebsklimas an einem beliebigen Tag i verwendet Mario die Zufallsvariable X_i. Die X_i seien stochastisch unabhängig mit:

$f_X(x) = 1+x$ für $-1 < x < 0$
und
$f_x(x) = 1-x$ für $0 < x < 1$
sowie
$f_X(x) = 0$ sonst.

(Aus Übersichtlichkeitsgründen habe ich an dieser Stelle auf den eigentlich notwendigen Index i an jedem x/X verzichtet.)

Ferner sei Z die Summe der Punktwerte über 12 verschiedene Arbeitstage.

a) Bestimmen Sie $E(X_i)$, $Var(X_i)$, E(Z) und Var(Z).
b) Bestimmen Sie $P\{|Z-E(Z)| < 2\}$ mit der Ungleichung von Tschebyscheff und mit dem Zentralen Grenzwertsatz.

28. Aufgabe:

X sei eine $N(\mu; 0{,}1^2)$-verteilte Zufallsvariable. Wie viele getrennte Messungen n müssen durchgeführt werden, damit der Stichprobenmittelwert vom Erwartungswert dem Betrage nach mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% maximal um 0,05 abweicht? Beantworten Sie die Frage mit der Ungleichung von Tschebyscheff und mit dem Zentralen Grenzwertsatz.

29. Aufgabe:

Die Zufallsvariable Y zur Beschreibung des Haushaltseinkommens eines normalen rumänischen Haushalts habe den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2. $X = (X_1,...,X_n)$ sei eine einfache Stichprobe zu Y vom Umfang n. Z sei die Summe der X_i mit i = 1,...,n.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Z.
b) Berechnen Sie mit dem Zentralen Grenzwertsatz $P\{n\mu - 2\sqrt{n}\sigma \leq Z \leq n\mu + 2\sqrt{n}\sigma\}$.
c) Geben Sie für obige Wahrscheinlichkeit mit der Tschebyscheff-Ungleichung die größte untere Schranke an.